Soluzioni secondo recupero di Analisi Matematica II (primi 5 crediti) del 7–12–07

Ingegneria Elettronica A.A.2007/2008, compito A

Problema 1 Per ogni compito le superfici in gioco sono del tipo $x^2+y^2=e^2$, $z=ax^2+by^2$, $z=cx^2+dy^2$. Il volume da trovare era

$$\int_{x^2+y^2\le e^2} dxdy\int_{ax^2+by^2}^{cx^2+dy^2} dz=\int_0^1 d\rho e^2\rho\int_0^{2\pi} d\varphi((c-a)e^2\rho^2\cos^2\varphi+(d-b)e^2\rho^2\sin^2\varphi)=$$

$$=\frac{\pi e^4}{4}((c-a)+(d-b))$$

e quindi: A–$\pi\frac{15}{16}$ B–30π C–$\pi\frac{20}{9}$ D–$\pi\frac{15}{16}$

Problema 2 La superficie da calcolare è la porzione del cilindro che giace compresa fra i due parabolidi. Si parametrizza il cilindro al solito modo $x=e\rho\cos t$, $y=e\rho\sin t$, $z=u$. La normale esterna è $\underline{n}=\underline{i}e\cos t+\underline{j}e\sin t$ il cui modulo è e. Abbiamo

$$e\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{ax^2+by^2}^{cx^2+dy^2} du=e\int_0^{2\pi} d\varphi((c-a)e^2\cos^2\varphi+(d-b)e^2\sin^2\varphi)$$

e quindi: A–$\pi\frac{15}{4}$ B–30π C–$\pi\frac{80}{9}$ D–$\pi\frac{15}{4}$

Problema 3 In tutti e quattro i casi si aveva: la curva era chiusa, la parte della forma differenziale contenente i seni e coseni aveva il rotore nullo. Essendo definita su tutto lo spazio che è semplicemente connesso, ne conseguiva che l'integrale di quella forma parte della forma era nullo. In ciascun caso si rimaneva con $\omega'=xdy+(y-x)dz$. Bisogna parametrizzare la curva che era data dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=a^2$, e la superficie (parabolide iperbolico) $z=bxy$. Si ha, al solito $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ba^2\sin t\cos t=\frac{ba^2}{2}\sin(2t)$.

$$\oint\omega'=\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t+a(\sin t-\cos t)ba^2\cos(2t)=a^2\pi$$

Problema 4–A $$\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=2\\k\neq 1}}^{\infty}\frac{k\cos\frac{k\pi}{2}}{1-k^2}\sin(kx)+\frac{\sin x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2p(-)^p}{1-4p^2}\sin(2px)+\frac{\sin x}{2}$$

Problema 4–B $$\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=2\\k\neq 1}}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{1-k^2}\cos(kx)+\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-)^p}{1-4p^2}\cos(2px)+\frac{\cos x}{2}$$

Problema 4–C $$\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{\infty}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2}}{4-k^2}\sin(kx)+\frac{\sin 2x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2(-)^p}{3-4p^2-4p}\sin((2p+1)x)+\frac{\sin 2x}{2}$$

Problema 4–D $$\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{\infty}\frac{k\sin\frac{k\pi}{2}}{4-k^2}\cos(kx)+\frac{\cos 2x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p+1)(-)^p}{3-4p^2-4p}\cos((2p+1)x)+\frac{\cos 2x}{2}$$

Problema 5–A $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_1'(t)+u_1(t)=t$, $u_2'(t)+4u_2(t)=-t$, $u_k'(t)+k^2u_k(t)=0$, se $k\neq 1,2$. La soluzione particolare della equazione $u_k'(t)+k^2u_k(t)=$

$\pm t$, è $\pm(\frac{t}{k^2}-\frac{1}{k^4})$. Quindi si ha $u(x,t)=(r_1e^{-t}+t-1)\sin x+(r_2e^{-4t}-\frac{t}{4}+\frac{1}{16})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{\infty}r_ke^{-k^2t}\sin(kx)$. Per $t=0$ abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}r_k\sin(kx)$ e questa espressione deve essere uguale a $\frac{1}{2}\sin 2x$ per cui: $r_1=1$, $r_2=\frac{7}{16}$, i restanti r_k valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=(e^{-t}+t-1)\sin x+(\frac{7}{16}e^{-4t}-\frac{t}{4}+\frac{1}{16})\sin(2x)$

Problema 5–B $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_1'(t)+u_1(t)=t$, $u_3'(t)+9u_3(t)=t$, $u_k'(t)+k^2u_k(t)=0$, se $k\neq 1,3$. Le soluzioni particolari delle prime due equazioni sono tutte rispettivamente $t-1$ e $\frac{t}{9}-\frac{1}{81}$ e quindi $u(x,t)=(r_1e^{-t}+t-1)\sin x+(r_3e^{-9t}+\frac{t}{9}-\frac{1}{81})\sin(3x)+\sum_{\substack{k=2\\k\neq 3}}^{\infty}r_ke^{-k^2t}\sin(kx)$. Per $t=0$ abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}r_k\sin(kx)$ e questa espressione deve essere uguale a $\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$ per cui $r_k=0$ a meno che $k=1$ nel qual caso vale $r_1=\frac{1}{2}$ e $k=3$ nel qual caso vale $r_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{81}$ Alla fine la soluzione è $u(x,t)=(\frac{1}{2}e^{-t}+t-1)\sin x+(\frac{83}{162}e^{-9t}+\frac{t}{9}-\frac{1}{81})\sin(3x)$

Problema 5–C $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_2'(t)+4u_2(t)=t$, $u_3'(t)+9u_3(t)=-t$, $u_k'(t)+k^2u_k(t)=0$, se $k\neq 2,3$. Le soluzioni particolari delle prime due equazioni sono rispettivamente $\frac{t}{4}-\frac{1}{16}$ e $-\frac{t}{9}+\frac{1}{81}$ quindi $u(x,t)=(r_2e^{-4t}+\frac{t^2}{4}-\frac{1}{16})\sin 2x+(r_3e^{-9t}-\frac{t}{9}+\frac{1}{81})\sin(3x)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2,3}}^{\infty}r_ke^{-k^2t}\sin(kx)$. Per $t=0$ abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}r_k\sin(kx)$ e questa espressione deve essere uguale a $\frac{1}{2}(-\sin 3x+\sin x)$ per cui $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{1}{16}$, $r_3=-\frac{83}{162}$, e tutti gli altri nulli. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-t}\sin x+(\frac{1}{16}e^{-4t}+\frac{t^2}{4}-\frac{1}{16})\sin 2x+(-\frac{83}{162}e^{-9t}-\frac{t}{9}+\frac{1}{81})\sin(3x)$

Problema 5–D $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_1'(t)+u_1(t)=-t$, $u_3'(t)+9u_3(t)=-t$, $u_k'(t)+k^2u_k(t)=0$, se $k\neq 1,3$. Le soluzioni particolari delle prime due equazioni sono rispettivamente $-t+1$ e $-\frac{t}{9}+\frac{1}{81}$ e quindi $u(x,t)=(r_1e^{-t}-t+1)\sin x+(r_3e^{-9t}-\frac{t}{9}+\frac{1}{81})\sin(3x)+\sum_{\substack{k=2\\k\neq 3}}^{\infty}r_ke^{-k^2t}\sin(kx)$. Per $t=0$ abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}r_k\sin(kx)$ e questa espressione deve essere uguale a $\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$ per cui $r_k=0$ a meno che $k=1$ nel qual caso vale $r_1=-\frac{3}{2}$ e $k=3$ nel qual caso vale $r_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{81}=\frac{79}{162}$. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=(-\frac{3}{2}e^{-t}-t+1)\sin x+(\frac{79}{162}e^{-9t}-\frac{t}{9}+\frac{1}{81})\sin(3x)$

Problema 6–A $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_k''+k^2u_k=c_k$ e c_k è il coefficiente di Fourier della funzione $\cos x$ sviluppato secondo i soli seni per cui $c_k=\dfrac{2k}{\pi}\dfrac{1+(-)^k}{k^2-1}$ e $c_1=0$. Quindi abbiamo $u_k''+k^2u_k=0$ se k è dispari; $u_k''+k^2u_k=\dfrac{4k}{\pi(k^2-1)}$ se k è pari. Abbiamo $u(x,t)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t+B_{2p+1}\sin(2p+1)t)+\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sin(2px)(A_{2p}\cos 2pt+B_{2p}\sin 2pt+\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p})$. La condizione $u_t(x,0)=0$ dice che $B_k=0$ per ogni valore di k. La condizione $u(x,0)=-\cos x$ dà come risultato $A_{2p+1}=0$ mentre $A_{2p}+\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p}=\dfrac{-8p}{\pi(4p^2-1)}$ e quindi $A_{2p}=\dfrac{-8p}{\pi(4p^2-1)}-\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p}$. La soluzione è dunque
$u(x,t)=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sin 2px(A_{2p}\cos 2pt+\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p})$

Problema 6–B $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_k''+k^2u_k=-c_k$ e c_k è il coefficiente di Fourier della funzione $\cos x$ sviluppato secondo i soli seni per cui $c_k=\dfrac{2k}{\pi}\dfrac{1+(-)^k}{k^2-1}$. Quindi abbiamo $u_k''+k^2u_k=0$ se k è dispari; $u_k''+k^2u_k=\dfrac{-4k}{\pi(k^2-1)}$ se k è pari. Abbiamo $u(x,t)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t+B_{2p+1}\sin(2p+1)t)+\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sin(2p)x(A_{2p}\cos 2pt+B_{2p}\sin 2pt-\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p}))$. La condizione $u_t(x,0)=0$ dice che $B_k=0$ per ogni valore di k. La condizione $u(x,0)=\cos x$ dà come risultato $A_{2p}=0$ per ogni p mentre $A_{2p}-\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p}=\dfrac{8p}{\pi(4p^2-1)}$ e quindi $A_{2p}=\dfrac{8p}{\pi(4p^2-1)}+\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p}$. La soluzione è dunque $u(x,t)=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sin 2px(A_{2p}\cos 2pt-\dfrac{2}{\pi(4p^2-1)p})$

Problema 6–C $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_k''+k^2u_k=c_k$ e c_k è il coefficiente di Fourier della funzione $\cos 2x$ sviluppato secondo i soli seni per cui $c_k=\dfrac{2k}{\pi}\dfrac{1-(-)^k}{k^2-4}$ e $c_2=0$. Quindi abbiamo $u_k''+k^2u_k=0$ se k è pari; $u_k''+k^2u_k=\dfrac{4k}{\pi(k^2-4)}$ se k è dispari. Abbiamo $u(x,t)=\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sin(2px)(A_{2p}\cos 2pt+B_{2p}\sin 2pt)+\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t+B_{2p+1}\sin(2p+1)t+\dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)})$. La condizione $u_t(x,0)=0$ dice che $B_k=0$ per ogni valore di k. La condizione $u(x,0)=-\cos 2x$ dà come risultato $A_{2p}=0$ per ogni p mentre $A_{2p+1}+\dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)}=-\dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-3)}$ e quindi $A_{2p+1}=-\dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-3)}-$

$\dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)}$. La soluzione è dunque

$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t + \dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)})$

Problema 6–D $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)u_k(x,t)$ dove $u_k'' + k^2u_k = -c_k$ e c_k è il coefficiente di Fourier della funzione $\cos 2x$ sviluppato secondo i soli seni per cui $c_k = \dfrac{2k}{\pi}\dfrac{1-(-)^k}{k^2-4}$ e $c_2 = 0$. Quindi abbiamo $u_k'' + k^2u_k = 0$ se k è pari; $u_k'' + k^2u_k = \dfrac{-4k}{\pi(k^2-4)}$ se k è dispari. Abbiamo $u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sin(2px)(A_{2p}\cos 2pt + B_{2p}\sin 2pt) + \sum_{p=1}^{\infty} \sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t + B_{2p+1}\sin(2p+1)t + \dfrac{-4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)})$. La condizione $u_t(x,0) = 0$ dice che $B_k = 0$ per ogni valore di k. La condizione $u(x,0) = \cos x$ dà come risultato $A_{2p} = 0$ per ogni p mentre $A_{2p+1} + \dfrac{-4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)} = \dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-3)}$ e quindi $A_{2p+1} = \dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-3)} + \dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)}$. La soluzione è dunque

$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sin(2p+1)x(A_{2p+1}\cos(2p+1)t - \dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)})$